2007 International Conference in Honor of Claude Lobry

Critique du rapport signal à bruit en communications numériques

Questioning the signal to noise ratio in digital communications

Michel FLIESS[1]

INRIA–ALIEN & LIX (CNRS, UMR 7161)
École polytechnique
91128 Palaiseau
France
Michel.Fliess@polytechnique.edu

RÉSUMÉ. On démontre que le rapport signal à bruit, si important en théorie de l'information, devient sans objet pour des communications numériques où la démodulation s'effectue selon des techniques nouvelles d'estimation rapide. Calcul opérationnel, algèbre différentielle, algèbre non commutative et analyse non standard sont les principaux outils mathématiques.

ABSTRACT. The signal to noise ratio, which plays such an important rôle in information theory, is shown to become pointless for digital communications where the demodulation is achieved via new fast estimation techniques. Operational calculus, differential algebra, noncommutative algebra and nonstandard analysis are the main mathematical tools.

MOTS-CLÉS : Théorie de l'information, traitement du signal, communications numériques, porteuses, symboles, modulation, démodulation, bruits, estimation, rapport signal à bruit, calcul opérationnel, algèbre différentielle, algèbre non commutative, analyse non standard.

KEYWORDS : Information theory, signal processing, digital communications, carriers, symbols, modulation, demodulation, noises, estimation, signal to noise ratio, operational calculus, differential algebra, noncommutative algebra, nonstandard analysis.

1. L'auteur dédie ce travail à Claude LOBRY, chercheur aussi brillant qu'original, et ami fidèle, qui lui a beaucoup appris, l'analyse non standard par exemple.

Extended english abstract

Introduction

The symbol to be transmitted is modulating a carrier, which is assumed to be a solution of a linear differential equation with polynomial coefficients. Most signals utilized in practice, like $\sum_{\text{finite}} A_\iota \sin(\omega_\iota t + \varphi_\iota)$, $A_\iota, \omega_\iota, \varphi_\iota \in \mathbb{R}$, sinc $t = \frac{\sin t}{t}$, $\frac{\cos t}{1+t^2}$, do satisfy this property. New algebraic estimation techniques [21, 23] permit to achieve demodulation even with very "strong" corrupting additive noises and therefore to question the importance of the signal to noise ratio, which is playing such a crucial rôle in information theory (see [43, 44] and [2, 3, 4, 7, 40]). Operational calculus, differential algebra and nonstandard analysis are the main mathematical tools.

Identifiability

Let $k_0(\Theta)$ be the field generated by a finite set $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\varrho\}$ of unknown *parameters*, where k_0 is a ground field of characteristic 0. We are utilizing the classical notations of operational calculus [48]. Introduce the differential field [8, 41] $\bar{k}(s)$ of rational functions in the indeterminate s over the algebraic closure $\bar{k}$ of $k_0(\Theta)$, with derivation $\frac{d}{ds}$. Any *signal* x, $x \not\equiv 0$, is assumed to satisfy a homogeneous linear differential equation with coefficients in $\bar{k}(s)$ and therefore to belong to a Picard-Vessiot extension [8, 41] of $\bar{k}(s)$. Write $\bar{k}(s)[\frac{d}{ds}]$ the noncommutative ring of linear differential operators with coefficients in $\bar{k}(s)$. The left $\bar{k}(s)[\frac{d}{ds}]$-module spanned by x and 1 is a $\bar{k}(s)$-vector space of finite dimension $n+1$, $n \geq 0$. It yields the *minimal* non necessarily homogeneous linear differential equation (2) where the polynomials $p, q_0, \ldots, q_n$ in $\bar{k}[s]$ are coprime. Introduce the square matrix $\mathfrak{M}$ of order $N+M+1$, where the ξ^{th} line, $0 \leq \xi \leq N+M$, is (5). Techniques stemming from Wronskian determinants [8, 41] demonstrate that the rank of $\mathfrak{M}$ is $N+M$. It follows that the coefficients of the polynomials $p, q_0, \ldots, q_n$ are *projectively linearly identifiable* [21, 23]. Consider as a particular case $x = \frac{p(s)}{q(s)}$ where the polynomials $p, q \in \bar{k}[s]$ are coprime. Then the coefficients of p and q are also projectively linearly identifiable.

Perturbations and estimators

Assume that the unknown parameters Θ are *linearly identifiable* [21, 23]. With and additive perturbation w, we obtain the estimator (6) where $\mathfrak{A}$, and $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ are respectvely $\varrho \times \varrho$ and $\varrho \times 1$ matrices, such that the entries of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ belong to $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, x)$ and those of $\mathfrak{C}$ to $\text{span}_{R[\frac{d}{ds}]}(w)$, where R is the localized ring [29] $k_0(\Theta)[s](k_0[s])^{-1}$. Moreover $\det(\mathfrak{A}) \neq 0$. It is always possible to obtain an estimator which is *strictly polynomial* with respect to $\frac{1}{s}$, i.e., where the rational functions in s are polynomials in $\frac{1}{s}$ without constant terms. As in [11] it yields in the time domain, if x is an analytic function, Formula (7) where c is a constant, $[0, t]$ is the *estimation time window*, the *divisor* $\delta(t)$ is an analytic function such that $\delta(0) = 0$, $[\theta_\iota]_e(t)$ is the estimated value of θ_ι at time t.

Noises

We are considering two types of perturbations, which are *noises* in the sense of [11]:

– The first noise, which is zero-mean, is a finite sum $\sum_{\text{finite}} A_i \sin(\Omega_i t + \varphi_i)$ where the frequencies $\Omega_i > 0$ are unlimited.

– Let ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$ be the nonstandard extensions [42] of $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Replace $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ by the hyperfinite set [42] $\mathrm{I} = \{0, \frac{1}{\bar{N}}, \ldots, \frac{\bar{N}-1}{\bar{N}}, 1\}$, where $\bar{N} \in {}^*\mathbb{N}$ is unlimited. A *zero-mean white noise* is a function $w : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$, $\iota \mapsto w(\iota) = An(\iota)$, where

- $A \in {}^*\mathbb{R}$ is a constant, such that $\frac{A^2}{\bar{N}}$ is limited,

- the $n(\iota)$ are independent zero-mean random variables with a normalized covariance 1.

The estimator (7) yields "good" values for the unknown parameters for any limited values of the amplitudes A_i, A, and even for some unlimited values of them.

1. Introduction

Le *rapport signal à bruit*[1], que l'on retrouve dans les formules de la théorie de l'information, telle qu'elle s'est imposée depuis Shannon (voir [43, 44] et, par exemple, dans la vaste littérature sur le sujet, [2, 3, 4, 7, 40]), est un ingrédient fondamental pour définir la qualité des communications. Le but de ce travail[2] est de démontrer qu'une nouvelle approche de l'estimation rapide et du bruit (voir [11] et sa bibliographie) rend ce rapport sans objet dans un certain cadre numérique. Revoyons, donc, le « paradigme de Shannon ». Le *symbole* à transmettre (voir, par exemple, [28, 40]) *module* une *porteuse* $z(t)$, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux :

$$\sum_{\text{finie}} a_\nu(t) z^{(\nu)}(t) = 0, \qquad a_\nu \in \mathbb{C}[t]$$

La plupart des signaux utilisés en pratique, comme une somme trigonométrique finie $\sum_{\text{finie}} A_\iota \sin(\omega_\iota t + \varphi_\iota)$, un sinus cardinal $\frac{\sin(\omega t)}{t}$ ou un cosinus surélevé $\frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}$, A_ι, ω_ι, φ_ι, $\omega \in \mathbb{R}$, vérifient une telle équation, qui se traduit dans le domaine opérationnel (cf. [48]), pour $t \geq 0$, par

$$\sum_{\text{finie}} a_\nu(-\frac{d}{ds}) s^\nu \hat{z} = I(s) \tag{1}$$

où $I \in \mathbb{C}[s]$ est un polynôme dont les coefficients dépendent des conditions initiales en $t = 0$. La *démodulation* revient, alors, à estimer certains des coefficients de (1). On y parvient, ici, grâce à des techniques algébriques récentes (cf. [21, 23]).

Un bruit, selon [11], est une fluctuation rapide, que l'on définit de façon efficace et élégante grâce à l'analyse non standard[3]. Les calculs du § 4 sont effectués avec une somme finie de sinusoïdes à très hautes fréquences et un bruit blanc, dont la définition non standard clarifie l'approche usuelle des manuels de traitement du signal. Ils démontrent la possibilité d'obtenir de « bonnes » estimations avec des bruits « très forts », c'est-à-dire de « grandes » puissances, fait confirmé par des simulations numériques et des expriences de laboratoire (voir [20, 30, 33, 34, 38, 45, 46, 47]). Les imperfections, inévitables en pratique, proviennent de l'implantation numérique des calculs, notamment de celui des intégrales (voir [30, 33]), des interférences entre symboles (voir [2, 28, 39, 40] et leurs bibliographies), et du fait que les bruits ne sont pas nécessairement centrés (voir à ce propos le § 3.2.2 de [11]).

Calcul opérationnel et algèbre différentielle aux § 2 et 3, analyse non standard au § 4 sont les principaux outils mathématiques.

1. Rappelons au lecteur peu au fait que toute transmission physique de signal est perturbée, notamment par du « bruit ». L'extraction des informations utiles malgré ces altérations est un but essentiel en traitement du signal et en théorie des communications. Que l'on pense par exemple aux *codes correcteurs d'erreurs*, où, comme les mathématiciens le savent, la théorie des *codes en blocs* est d'une grande richesse algébrique.
2. Voir [13] pour une version préliminaire.
3. Voir aussi [32].

Remarque 1 Ajoutons pour le lecteur étranger, voire hostile, à l'analyse non standard[4] *qu'il est loisible de la remplacer par des considérations « classiques ». On y perdrait en concision et, à notre avis, en intuition.*

Remarque 2 Avec des signaux analytiques par morceaux (le sens du mot analytique *est celui de la théorie des fonctions et non pas, ici, celui usuel en traitement du signal (cf. [2, 39, 40])), qui ne satisfont pas d'équations différentielles connues à l'avance, on utilise, selon les mêmes principes algébriques, des dérivateurs numériques à fenêtres glissantes pour obtenir les estimations (voir [35] et [17, 19, 27], leurs exemples et leurs bibliographies). On ne peut, alors, espérer les mêmes résultats que précédemment.*

Remarque 3 La possibilité de liens entre théorie de l'information et mécanique quantique a été examinée par divers auteurs (voir, par exemple, [4, 5, 24]). Rappelons à ce propos que l'approche du bruit en [11] a déjà conduit à une tentative nouvelle de formalisation du quantique [12], qui sera complétée grâce à un résultat remarquable et tout récent, dû à Charreton [6].

Remarque 4 Les techniques d'estimation évoquées plus haut ont permis des avancées notables en automatique[5]*, linéaire ou non.*

Remarque 5 Des travaux en cours portant sur l'ingéniérie financière devraient également démontrer l'applicabilité de notre point de vue à cette discipline[6].

Remerciements. L'auteur exprime sa reconnaissace à O. Gibaru (Lille), M. Mboup (Paris) et à tous les membres du projet INRIA–ALIEN pour des échanges fructueux.

2. Identifiabilité

2.1. Équations différentielles

Renvoyons à [8] pour des rappels sur les corps, différentiels ou non.

Soit k_0 le corps de base de caractéristique nulle, $\mathbb{Q}$ par exemple. Soit $k_0(\Theta)$ le corps engendré par un ensemble fini $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\varrho\}$ de *paramètres* inconnus. Soit $\bar{k}$ la clôture algébrique de $k_0(\Theta)$. Introduisons le corps $\bar{k}(s)$ des fractions rationnelles en l'indéterminée s, que l'on munit d'une structure de corps différentiel grâce à la dérivation $\frac{d}{ds}$ (les

4. Lobry [31] a écrit un pamphlet édifiant sur l'histoire « agitée » et la réception « houleuse » de cette analyse, en dépit (à cause ?) de sa beauté et de sa puissance inconstestables. Les propres déboires de l'auteur lui ont prouvé que ce témoignage n'est pas exagéré !
5. Voir, par exemple, [14, 18, 19, 21, 22, 23] et leurs bibliographies. Des questions classiques sur l'identification paramétrique, les observateurs, le diagnostic et l'atténuation de perturbations y reçoivent des solutions d'une grande simplicité conceptuelle et faciles à mettre en œuvre en temps réel. Mentionnons aussi la *commande sans modèle* [15], particulièrement prometteuse.
6. Voir [16] pour une première ébauche.

éléments de k_0, de Θ et, donc, de $\bar{k}$, sont des constantes). Tout *signal* x, $x \not\equiv 0$, est supposé satisfaire une équation différentielle linéaire homogène, à coefficients dans $\bar{k}(s)$, et donc appartenir à une extension de Picard-Vessiot de $\bar{k}(s)$.

Remarque 6 Il suffit pour se convaincre de l'existence d'une telle équation homogène de dériver les deux membres de (1) suffisamment de fois par rapport à s.

L'anneau non commutatif $\bar{k}(s)[\frac{d}{ds}]$ des opérateurs différentiels linéaires

$$\sum_{\text{finie}} \varpi_\alpha(s) \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}, \qquad \varpi_\alpha(s) \in \bar{k}(s)$$

est principal à droite et à gauche (cf. [36]). Le $\bar{k}(s)[\frac{d}{ds}]$-module à gauche engendré par x et 1 est un module de torsion (cf. [36]), et, donc, un $\bar{k}(s)$-espace vectoriel de dimension finie, $n+1$, $n \geq 0$. D'où le résultat suivant qui semble nouveau (cf. [8, 41]) :

Proposition 2.1 *Il existe un entier minimal* $n \geq 0$*, tel que* x *satisfait l'équation différentielle linéaire, d'ordre* n*, non nécessairement homogène,*

$$\left(\sum_{\iota=0}^{n} q_\iota \frac{d^\iota}{ds^\iota} \right) x - p = 0 \tag{2}$$

où les polynômes $p, q_0, \ldots, q_n \in \bar{k}[s]$ *sont premiers entre eux. Cette équation, dite* minimale*, est unique à un coefficient multiplicatif constant non nul près.*

2.2. Identifiabilité linéaire projective

Rappelons que l'ensemble $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\varrho\}$ de paramètres est dit (cf. [21, 23])

– *linéairement identifiable* si, et selement si,

$$\mathfrak{A} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_\varrho \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \tag{3}$$

où

- les entrées des matrices $\mathfrak{A}$, carrée $\varrho \times \varrho$, et $\mathfrak{B}$, colonne $\varrho \times 1$, appartiennent à $\mathrm{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, x)$;

- $\det(\mathfrak{A}) \neq 0$.

– *projectivement linéairement identifiable* si, et seulement si,

- il existe un paramètre, θ_1 par exemple, non nul,

- l'ensemble $\{\frac{\theta_2}{\theta_1}, \ldots, \frac{\theta_\varrho}{\theta_1}\}$ est linéairement identifiable.

Réécrivons (2) sous la forme suivante :

$$\left(\sum_{\text{finie}} a_{\mu\nu} s^\mu \frac{d^\nu}{ds^\nu} \right) x - \sum_{\text{finie}} b_\kappa s^\kappa = 0 \tag{4}$$

où les $N+1$ coefficients $a_{\mu\nu}$ et les M coefficients b_κ appartiennent à $\bar{k}$. La matrice carrée $\mathfrak{M}$ d'ordre $N+M+1$, dont la $\xi^{\text{ème}}$ ligne, $0 \leq \xi \leq N+M$, est

$$\ldots, \frac{d^\xi}{ds^\xi}\left(s^\mu \frac{d^\nu x}{ds^\nu}\right), \ldots, \frac{d^\xi s^\kappa}{ds^\xi}, \ldots \tag{5}$$

est singulière d'après (2) et (4). La minimalité de (2) permet de démontrer selon des techniques bien connues sur le rang du wronskien (cf. [8, 41]) que le rang de $\mathfrak{M}$ est $N+M$. Il en découle :

Théorème 2.2 *Les coefficients $a_{\mu\nu}$ et b_κ de (4) sont projectivement linéairement identifiables.*

Corollaire 2.3 *Posons $x = \frac{p(s)}{q(s)}$, où les polynômes $p, q \in \bar{k}[s]$ sont premiers entre eux. Alors, les coefficients de p et q sont projectivement linéairement identifiables.*

Il est loisible de supposer l'ensemble des paramètres inconnus $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\varrho\}$ strictement inclus dans celui des coefficients $a_{\mu\nu}$ et b_κ de (4), et donc linéairement identifiable.

3. Perturbations et estimateurs

Avec une perturbation additive w le capteur fournit non pas x mais $x+w$. Soient

– $R = k_0(\Theta)[s](k_0[s])^{-1}$ l'anneau *localisé* (cf. [29]) des fractions rationnelles à numérateurs dans $k_0(\Theta)[s]$ et dénominteurs dans $k_0[s]$,

– $R[\frac{d}{ds}]$ l'anneau non commutatif des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans R.

On obtient, à partir de (3), la

Proposition 3.1 *Les paramètres inconnus vérifient*

$$\mathfrak{A}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots \\ \theta_\varrho\end{pmatrix} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \tag{6}$$

où les entrées de $\mathfrak{C}$, matrice colonne $\varrho \times 1$, appartiennent à $\mathrm{span}_{R[\frac{d}{ds}]}(w)$.

On appelle (6) un *estimateur*. Il est dit *strictement polynomial en* $\frac{1}{s}$ si, et seulement si, toutes les fractions rationnelles en s, rencontrées dans les coefficients des matrices $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de (6), sont des polynômes en $\frac{1}{s}$ sans termes constants. On peut toujours s'y ramener en multipliant les deux membres de (6) par une fraction rationnelle de $k_0(s)$ convenable. On aboutit, alors, dans le domaine temporel, aux estimateurs considérés en [11], si l'on suppose l'analyticité du signal :

$$\delta(t)\left([\theta_\iota]_e(t) - \theta_\iota\right) = \sum_{\text{finie}} c \int_0^t \ldots \int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} \tau_1^\nu w(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_k \qquad \iota = 1, \ldots, \varrho \tag{7}$$

où

– c est une constante,

– $[0, t]$ est la *fenêtre d'estimation*, de *largeur* t,

– $\delta(t)$ est une fonction analytique, appelée *diviseur*, nulle en 0,

– $[\theta]_e(t)$ est l'estimée de θ en t.

4. Bruits

Renvoyons à [42] et [9] pour la terminologie de l'analyse non standard, déjà utilisée en [11]. Les propositions 4.1 et 4.2 ci-dessous affinent la proposition 3.2 de [11], où les estimations sont obtenues en temps limité, « court » en pratique.

4.1. Sinusoïdes hautes fréquences

La perturbation du § 3 est de la forme

$$\sum_{\iota=1}^{M} A_\iota \sin(\Omega_\iota t + \varphi_\iota)$$

où

– M est un entier limité standard,

– les fréquences $\Omega_\iota > 0$ sont des constantes illimitées,

– les amplitudes A_ι sont des constantes, limitées ou non,

– les phases φ_ι, $0 \leq \varphi_\iota < 2\pi$, sont des constantes.

Si les quotients $\frac{A_\iota}{\Omega_\iota}$ sont infinitésimaux, c'est un bruit centré, c'est-à-dire de moyenne nulle, au sens de [11]. Des manipulations élémentaires des intégrales itérées (7) conduisent à la

Proposition 4.1 *Si*

– les quotients $\frac{A_\iota}{\Omega_\iota}$ sont infinitésimaux, et, en particulier, si les A_ι sont limités,

– la largeur de la fenêtre d'estimation est limitée et n'appartient pas au halo d'un zéro du diviseur,

les estimées des paramètres inconnus, obtenues grâce à (7), appartiennent aux halos de leurs vraies valeurs. Il n'en va plus de même si l'un des quotients $\frac{A_\iota}{\Omega_\iota}$ est appréciable.

Remarque 7 Il existe des valeurs illimitées des amplitudes A_ι, $\sqrt{\Omega_\iota}$ par exemple, telles que les estimées précédentes appartiennent aux halos des vraies valeurs.

4.2. Bruits blancs

Désignons par ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$ les extensions non standard de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Remplaçons l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ par l'ensemble hyperfini $\mathrm{I} = \{0, \frac{1}{\bar{N}}, \ldots, \frac{\bar{N}-1}{\bar{N}}, 1\}$, où $\bar{N} \in {}^*\mathbb{N}$ est illimité. Un *bruit blanc centré* est une fonction $w : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$, $\iota \mapsto w(\iota) = An(\iota)$, où

– l'amplitude $A \in {}^*\mathbb{R}$ est constante,

– le quotient $\frac{A^2}{N}$ est limité,

– les $n(\iota)$ sont des variables aléatoires réelles, supposées centrées, de même écart-type 1 normalisé, et deux à deux indépendantes.

Remarque 8 Cette définition non restreinte au cas gaussien, qu'il convient de comparer à celle de [1], précise [11] ; elle est inspirée de publications d'ingénieurs sur le bruit blanc en temps discret (voir, par exemple, [39]). Elle clarifie, à la manière de [37], l'approche en temps continu usuelle dans les manuels de traitement du signal (voir, à ce sujet, [2, 7, 39, 40] et leurs bibliographies). Rappelons que cette approche continue est basée, en général, sur l'analyse de Fourier et renvoyons, à ce sujet, à [10]. Mentionnons, enfin, les travaux de [25, 26], basés sur l'analyse fonctionnelle.

Remarque 9 Un pas supplémentaire, inutile ici pour nos besoins, consisterait à remplacer, comme en [37], les variables aléatoires $n(\iota)$ par des analogues « discrets ».

Comme au § 4.1, il vient :

Proposition 4.2 *Si*

– le quotient $\frac{A^2}{N}$ est infinitésimal, et, en particulier, si A est limité,

– la largeur t, $t \in \mathrm{I}$, de la fenêtre d'estimation n'appartient pas au halo d'un zéro du diviseur,

les estimées des paramètres inconnus, obtenues grâce à (7), appartiennent presque sûrement aux halos de leurs vraies valeurs. Il n'en va plus de même si le quotient $\frac{A^2}{N}$ est appréciable.

Remarque 10 Il existe des valeurs illimitées de A, $\sqrt[3]{N}$ par exemple, telles que les estimées précédentes appartiennent presque sûrement aux halos des vraies valeurs.

Remarque 11 Il est loisible de remplacer l'indépendance de $n(\iota)$ et $n(\iota')$, $\iota \neq \iota'$, par le fait que l'espérance du produit $n(\iota)n(\iota')$ est infinitésimale.

5. Bibliographie

[1] S. ALBEVERIO, J.E. FENSTAD, R. HOEGH-KRØHN, T. LINDSTRØM, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, 1986.

[2] G. BATTAIL, *Théorie de l'information - Application aux techniques de communication*, Masson, 1997.

[3] R.E. BLAHUT, *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley, 1987.

[4] L. BRILLOUIN, *Science and Information Theory* (2^{nd} ed.), Academic Press, 1962. Traduction française de la 1^{re} éd. : *La science et la théorie de l'information*, Masson, 1959.

[5] C. BRUKNER, A. ZEILINGER, « Conceptual inadequacy of the Shannon information in quantum measurements », *Phys. Rev. A*, vol. 63 (2001) 022113.

[6] R. CHARRETON, « Une loi limite pour les marches aléatoires avec des applications physiques », *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol. 345 (2007) 699-703.

[7] T.M. COVER, J.A. THOMAS, *Elements of Information Theory*, Wiley, 1991.

[8] A. CHAMBERT-LOIR, *Algèbre corporelle*, Éditions École Polytechnique, 2005. English translation: *A Field Guide to Algebra*, Springer, 2005.

[9] F. DIENER, G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann, 1989.

[10] M. FLIESS, « Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal », Manuscrit, 2005 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00000461/en/`).

[11] M. FLIESS, « Analyse non standard du bruit », *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol. 342 (2006) 797-802.

[12] M. FLIESS, « Probabilités et fluctuations quantiques », *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol. 344 (2007) 663-668.

[13] M. FLIESS, « Critique du rapport signal à bruit en théorie de l'information », Manuscrit, 2007 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00195987/en/`).

[14] M. FLIESS, S. FUCHSHUMER, M. SCHÖBERL, K. SCHLACHER, H. SIRA-RAMÍREZ, « An introduction to algebraic discrete-time linear parametric identification with a concrete application », *J. europ. syst. automat.*, vol. 42 (2008) 211-232.

[15] M. FLIESS, C. JOIN, « Commande sans modèle et commande à modèle restreint », *e-STA*, vol. 5 (2008) (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00288107/en/`).

[16] M. FLIESS, C. JOIN, « Time series technical analysis via new fast estimation methods: A preliminary study in mathematical finance », *23rd IAR Workshop Advanced Control Diagnosis – IAR-ACD08*, Coventry, 2008 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00338099/en/`).

[17] M. FLIESS, C. JOIN, M. MBOUP, H. SIRA-RAMÍREZ, « Compression différentielle de transitoires bruités », *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol. 339 (2004) 821-826.

[18] M. FLIESS, C. JOIN, H. SIRA-RAMÍREZ, « Residual generation for linear fault diagnosis: an algebraic setting with examples », *Int. J. Control*, vol. 77 (2004) 1223-1242.

[19] M. FLIESS, C. JOIN, H. SIRA-RAMÍREZ, « Non-linear estimation is easy », *Int. J. Modelling Identification Control*, vol. 4 (2008) 12-27.

[20] M. FLIESS, M. MBOUP, H. MOUNIER, H. SIRA-RAMÍREZ, « Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples », *in* H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.): *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, pp. 1-21, Editiorial Lagares, 2003 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001059/en/`).

[21] M. FLIESS, H. SIRA-RAMÍREZ, « An algebraic framework for linear identification », *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, vol. 9 (2003) 151-168.

[22] M. FLIESS, H. SIRA-RAMÍREZ, « Reconstructeurs d'état », *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol. 338 (2004) 91-96.

[23] M. FLIESS, H. SIRA-RAMÍREZ, « Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques », *in* H. Garnier, L. Wang (Eds.): *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, pp. 363-391, Springer, 2008.

[24] H.S. GREEN, *Information Theory and Quantum Physics*, Springer, 2000.

[25] I.N. GUELFAND, N.Y. VILENKIN, *Les distributions*, t. 4 : *Applications de l'analyse harmonique* (traduit du russe), Dunod, 1967.

[26] T. HIDA, H.-H. KUO, J. POTTHOF, L. STREIT, *White Noise*: *An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer, 1993.

[27] C. JOIN, S. TABBONE, « Robust curvature extrema detection based on new numerical derivation », *Advanced Concepts Intelligent Vision Systems – ACIVS'2008*, Juan-les-Pins, 2008 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00300799/en/`).

[28] M. JOINDOT, A. GLAVIEUX, *Introduction aux communications numériques*, Masson, 1996.

[29] S. LANG, *Algebra* (3rd rev. ed.), Springer, 2002. Traduction française : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[30] D. LIU, O. GIBARU, W. PERRUQUETTI, M. FLIESS, M. MBOUP, « An error analysis in the algebraic estimation of a noisy sinusoidal signal », *Proc. 15th Medit. Conf. Control Automation – MED'2008*, Ajaccio, 2008 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00300234/en/`).

[31] C. LOBRY, *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ *!*, ALEAS, 1989.

[32] C. LOBRY, T. SARI, « Nonstandard analysis and representation of reality », *Int. J. Control*, vol. 81 (2008) 517-534.

[33] M. MBOUP, « Parameter estimation via differential algebra and operational calculus », Manuscrit, 2006 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00138294/en/`).

[34] M. MBOUP, C. JOIN, M. FLIESS, « A delay estimation approach to change-point detection », *Proc. 16th Medit. Conf. Control Automation – MED'2008*, Ajaccio, 2008 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00179775/en/`).

[35] M. MBOUP, C. JOIN, M. FLIESS, « Numerical differentiation with annihilators in noisy environment », *Numer. Algorithm.*, (2009) DOI: 10.1007/s11075-008-9236-1.

[36] J. MCCONNELL, J. ROBSON, *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Soc., 2000.

[37] E. NELSON, *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton University Press, 1987 (accessible sur `http://www.math.princeton.edu/%7Enelson/books/rept.pdf`).

[38] A. NEVES, M.D. MIRANDA, M. MBOUP, « Algebraic parameter estimation of damped exponentials », *Proc. 15th Europ. Signal Processing Conf. – EUSIPCO'2007*, Poznań, 2007 (accesible sur `http://hal.inria.fr/inria-00179732/en/`).

[39] J.G. PROAKIS, *Digital Communications* (4th ed.), McGraw-Hill, 2001.

[40] J.G. PROAKIS, M. SALEHI, *Communication Systems Engineering* (2nd ed.), Prentice Hall, 2002.

[41] M. VAN DER PUT, M.F. SINGER, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, 2003.

[42] A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis* (2nd ed.), North-Holland, 1974.

[43] C.E. SHANNON, « A mathematical theory of communication », *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27 (1948) 379-457 & 623-656.

[44] C.E. SHANNON, « Communication in the presence of noise », *Proc. IRE*, vol. 37 (1949) 10-21.

[45] J.R. TRAPERO, H. SIRA-RAMÍREZ, V. FELIU BATTLE, « An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal », *Signal Processing*, vol. 87 (2007) 1188-1201.

[46] J.R. TRAPERO, H. SIRA-RAMÍREZ, V. FELIU BATTLE, « A fast on-line frequency estimator of lightly damped vibrations in flexible structures », *J. Sound Vibration*, vol. 307 (2007) 365-378.

[47] J.R. TRAPERO, H. SIRA-RAMÍREZ, V. FELIU BATLLE, « On the algebraic identification of the frequencies, amplitudes and phases of two sinusoidal signals from their noisy sums », *Int. J. Control*, vol. 81 (2008) 505-516.

[48] K. YOSIDA, *Operational Calculus*: *A Theory of Hyperfunctions* (translated from the Japanese), Springer, 1984.